Lösungen zur 2. Mathe-Nacht

Warnhinweis: Diese Lösungen wurden nicht auf ihre Richtigkeit überprüft. Solltet ihr Fehler finden, so meldet Euch bitte bei Mara Jakob (mara.jakob@mathematik.uni-halle.de)

Lösungen-Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Hinweis: Die grünen Textstellen sind Anmerkungen und Überlegungen, die nicht zur eigentlichen Lösung gehören.

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) Ist f stetig?

b) Ist f partiell differenzierbar? Wenn ja, gib die partiellen Ableitungen an!

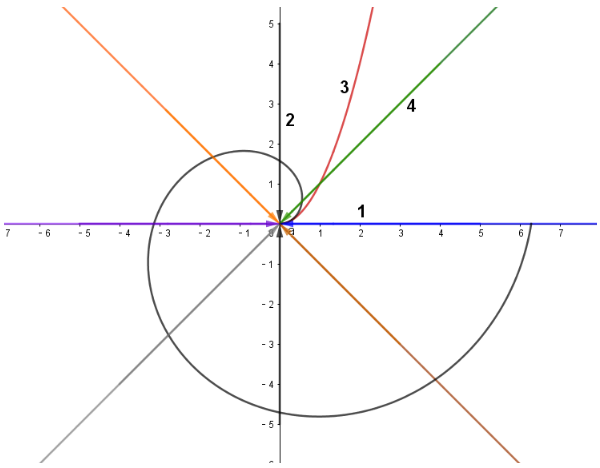
c) Ist f differenzierbar?

Lösung:

a) In allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ ist die Funktion nach Stetigkeitssätzen stetig, da sie hier aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist. Interessant wird es an der Stelle $(0,0)$. Wenn die Funktion hier stetig wäre, müsste gelten

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Wie können wir überprüfen, ob dies stimmt? Ein guter Trick ist es, sich dem Punkt $(0,0)$ auf bestimmten Wegen/von bestimmten Richtungen zu nähern und zu schauen, ob für diese bestimmten Wege der Grenzwert gleich 0 ist. Wenn nicht, weiß man sofort, dass die Funktion nicht stetig ist. (Erinnerung: Wir befinden uns im $\mathbb{R}^2$. Wir können uns einer Stelle also nicht mehr nur von links und rechts nähern, sondern auf unendlich vielen Wegen, wie man in der Skizze erkennt:



Mindestens die 4 markierten Wege sollte man ausprobieren, bevor man zu der Vermutung kommt, dass die Funktion stetig ist.

1. Wir nähern uns dem Nullpunkt auf der x-Achse von rechts an. Hier gilt

für jeden Punkt: $y = 0$. Wir überprüfen den Grenzwert:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2+0^2}{x^2+x\cdot 0+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

Wir können hier schon aufhören, denn wir haben einen Weg gefunden, auf dem der Grenzwert nicht gleich dem gewünschten Grenzwert ist. Wir schreiben die Lösung ordentlich auf:

Im Punkt $(0,0)$ ist die Funktion nicht stetig, denn es gilt:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+0^2}{x^2+x\cdot 0+0^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

b) In allen Punkten $(x,y)\neq(0,0)$ ist die Funktion partiell differenzierbar. Interessant wird es wieder an der Stelle $(0,0)$. Nach Vorlesung ist eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ an der Stelle (x_1,x_2) partiell differenzierbar, wenn die folgenden Grenzwerte existieren:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1+t,x_2)-f(x_1,x_2)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,x_2+t)-f(x_1,x_2)}{t}$$

Da wir uns für die Stelle $(0,0)$ interessieren, berechnen wir also:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2+0^2}{t^2+t\cdot 0+0^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \infty\end{aligned}$$

Da der Grenzwert nicht existiert, ist f an der Stelle $(0,0)$ nicht partiell nach x differenzierbar.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^2+t^2}{0^2+0\cdot t+t^2}-0}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \infty\end{aligned}$$

Da auch dieser Grenzwert nicht existiert, ist f an der Stelle $(0,0)$ nicht partiell nach y differenzierbar.

c) f ist nicht differenzierbar an der Stelle $(0,0)$, da f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig ist. Nach Vorlesung folgt nämlich aus der (totalen) Differenzierbarkeit die Stetigkeit. Ist die Funktion an einer Stelle nicht stetig, so kann sie hier also auch nicht (total) differenzierbar sein (denn sonst würde ja die Stetigkeit folgen!). In allen Punkten $(x,y)\neq(0,0)$ ist f differenzierbar.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y) = (x(1 - y), xy)$$

Zeige mit der Definition der totalen Differenzierbarkeit, dass f im Nullpunkt total differenzierbar ist! Gib die Ableitung im Nullpunkt an!

Lösung: Nach Vorlesung ist f an der Stelle $(0, 0)$ total differenzierbar, wenn es eine 2×2-Matrix A gibt mit der Eigenschaft:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\|f(x, y) - f(0, 0) - A \cdot ((x, y) - (0, 0))\|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = 0$$

Wir müssen also eine solche Matrix A finden. Nach Vorlesung wissen wir außerdem, dass wenn eine Funktion differenzierbar ist, diese Matrix A gleich der Jacobi-Matrix ist. Wenn wir zeigen können, dass die obige Gleichung für die Jacobi-Matrix gilt, so haben wir eine Matrix A gefunden, die die gewünschte Eigenschaft hat. Somit hätten wir bewiesen, dass f differenzierbar ist.

Berechnen wir also die Jacobi-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun zeigen wir, dass diese Matrix die geforderten Bedingungen erfüllt:

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\|f(x, y) - f(0, 0) - A\,((x, y) - (0, 0))\|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\| \begin{pmatrix} x(1-y) \\ xy \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|}{\|(x, y)\|} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\| \begin{pmatrix} x - xy) \\ xy \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}^T \|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\| \begin{pmatrix} -xy \\ xy \end{pmatrix}^T \|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\sqrt{2x^2y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2}} \\
\leq &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2}} \\
= &\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \sqrt{2y^2} = 0
\end{aligned}$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $0 \leq \sqrt{\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}} \leq \sqrt{2y^2}$.

Aus $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} \sqrt{2y^2} = 0$ folgt somit:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),(x,y)\neq(0,0)} \frac{\|f(x,y) - f(0,0) - A\left((x,y) - (0,0)\right)\|}{\|(x,y) - (0,0)\|} = 0$$

Somit ist f nach Definition im Nullpunkt total differenzierbar.

3. Die Abbildung f sei gegeben durch $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ für $x, y, z \neq 0$.

   a) Ist f stetig fortsetzbar an der Stelle $(0,0,0)$?

   b) Entwickle die Funktion f im Punkt $p = (2,1,4)$ in ein Taylorpolynom zweiten Grades.

   c) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle $p = (2,1,4)$.

Lösung:

a) Stetig fortsetzbar ist die Funktion, wenn man einen Funktionswert für die Stelle $(0,0,0)$ finden kann, sodass die Funktion weiterhin stetig ist. Stetig an der Stelle $(0,0,0)$ ist die Funktion genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

gleich dem Funktionswert an der Stelle $(0,0,0)$ ist. Wir müssen also nichts weiter tun als diesen Grenzwert ausrechnen und das Ergebnis als Funktionswert für die Stelle $(0,0,0)$ wählen. Existiert dieser Grenzwert nicht, so ist die Funktion nicht stetig fortsetzbar an der Stelle $(0,0,0)$.

Wie in Aufgabe 1 bereits erläutert, gibt es im $\mathbb{R}^3$ unendlich viele Wege, sich dem Punkt $(0,0,0)$ anzunähern. Wir wählen zunächst einen dieser Wege und schauen, ob der Grenzwert bei Annäherung auf diesem Weg überhaupt existiert. Wir wollen uns auf der Geraden mit $x = y = z > 0$ annähern:

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z, x,y,z\neq 0}} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{3}{x} = \infty
\end{aligned}$$

Somit kann auch der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0}} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ nicht existieren.

Die Funktion ist somit an der Stelle $(0,0,0)$ nicht stetig fortsetzbar.

b) Nach Vorlesung kann eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2(U)$ in einer Umgebung von $x \in U$ durch ein Taylorpolynom zweiten Grades wie folgt angenähert werden. Für den Funktionswert an einer Stelle $x + h$ (in der Nähe von x) gilt dann:

$$f(x+h) \approx f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} h \cdot H_f(x) \cdot h^T$$

Für den Gradienten $\nabla f(x)$ und die Hessematrix $H_f(x)$ berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen:

Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-1}{z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

Damit lässt sich f in einer Umgebung vom Punkt $p = (2, 1, 4)$ annähern durch das Taylorpolynom zweiten Grades:

$$\begin{aligned}
f(2+h_1, 1+h_2, 4+h_3) \approx f(2,1,4) &+ \langle \begin{pmatrix} -1/2^2 \\ -1/1^2 \\ -1/4^2 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}^T \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \cdot (h_1, h_2, h_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{2^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{1^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{4^3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{h_1}{4} - h_2 - \frac{h_3}{16}\right) + \frac{1}{2} \cdot (h_1, h_2, h_3) \cdot \begin{pmatrix} h_1/4 \\ 2h_2 \\ h_3/32 \end{pmatrix} \\
&= \frac{7}{4} + \left(-\frac{h_1}{4} - h_2 - \frac{h_3}{16}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h_1^2}{4} + 2h_2^2 + \frac{h_3^2}{32}\right) \\
&= \frac{7}{4} - \frac{1}{4}h_1 - h_2 - \frac{1}{16}h_3 + \frac{1}{8}h_1^2 + h_2^2 + \frac{1}{64}h_3^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - (y-1) - \frac{1}{16}(z-4) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + (y-1)^2 + \frac{1}{64}(z-4)^2$$

Im letzten Schritt haben wir (h_1, h_2, h_3) durch $(x, y, z) - (2, 1, 4)$ ersetzt. Mit (h_1, h_2, h_3) gelangen wir vom Entwicklungspunkt $(2, 1, 4)$ zu einem Punkt in der Nähe: $(2, 1, 4) + (h_1, h_2, h_3)$. In diesem Punkt wird der tatsächliche Funktionswert durch das Taylorpolynom angenähert. (x, y, z) seien die Koordinaten dieses Punktes. Dann gilt $(x, y, z) = (2, 1, 4) + (h_1, h_2, h_3)$. Stellt man dies um, so erhält man $(h_1, h_2, h_3) = (x-2, y-1, z-4)$.

c) Der Graph des Taylorpolynoms ersten Grades an der Stelle $(2, 1, 4)$ ist die Tangentialebene an dieser Stelle.

Das Taylorpolynom ersten Grades ist nach a) das Polynom $\frac{7}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - (y-1) - \frac{1}{16}(z-4)$

Nach a) besteht die Tangentialebene also aus folgenden Punkten:

$$\left\{ \left(x, y, z, \frac{7}{4} - \frac{1}{4}(x-2) - (y-1) - \frac{1}{16}(z-4) \right) | x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Achtung! Da die Funktion im $\mathbb{R}^3$ startet (und nicht wie bei vielen Beispielen im $\mathbb{R}^2$) handelt es sich hier um eine Ebene im $\mathbb{R}^4$ (bei einer Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ erhält man eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, wo wir Ebenen anschaulich immer verorten). Wir können uns diese Ebene also nicht mehr anschaulich vorstellen.

4. Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Zeige, dass alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ gleich Null sind.

b) Überprüfe die Aussage auf ihren Wahrheitswert: Die Richtungsableitungen existieren in allen Punkten auf der x-Achse.

Lösung:

a) Es sei $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ ein belibiger Vektor in $\mathbb{R}^2$. Nach Vorlesung ist dann die Richtungsableitung an der Stelle $(0,0)$ in Richtung v der folgende Grenzwert:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0)+t(v_1,v_2)\right) - f\left((0,0)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((tv_1, tv_2)\right) - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)^3+(tv_2)^3}{|tv_1|+|tv_2|}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(tv_1)^3+(tv_2)^3}{(|tv_1|+|tv_2|)\,t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\left(v_1^3+v_2^3\right)}{|t|\left(|v_1|+|v_2|\right)t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{|t|} \frac{\left(v_1^3+v_2^3\right)}{\left(|v_1|+|v_2|\right)} = \frac{\left(v_1^3+v_2^3\right)}{\left(|v_1|+|v_2|\right)} \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{|t|} = \frac{\left(v_1^3+v_2^3\right)}{\left(|v_1|+|v_2|\right)} \lim_{t\to 0} \frac{|t|^2}{|t|}$$

$$= \frac{\left(v_1^3+v_2^3\right)}{\left(|v_1|+|v_2|\right)} \lim_{t\to 0} |t| = 0$$

Da v ein beliebiger, aber fester Vektor war, ist der Bruch $\frac{(v_1^3+v_2^3)}{(|v_1|+|v_2|)}$ eine Konstante und kann somit vor den Grenzwert gezogen werden.

b) Wir nehmen uns zunächst einen beliebigen Punkt auf der x-Achse her und schauen, ob dort alle Richtungsableitungen existieren. Bei Punkten auf der x-Achse ist die y-Koordinaten gleich Null.

Es sei $(x,0)$ ein beliebiger Punkt auf der x-Achse. Wir versuchen die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left((x,0)+t(v_1,v_2)\right) - f\left((x,0)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((x+tv_1, tv_2)\right) - \frac{x^3}{|x|}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(x+tv_1)^3+(tv_2)^3}{|x+tv_1|+|tv_2|} - \frac{x^3}{|x|}}{t}$$

Um diesen riesigen Bruch irgendwie händeln zu können, betrachten wir ab nun den Spezialfall $t > 0$ und $x > 0$, da man dann einige Umformungen ausführen kann. Später betrachten wir den Fall $t < 0$ und schauen, ob die Grenzwerte übereinstimmen. Für $t, x > 0$ ist $|x+tv_1| + |tv_2| = x + tv_1 + tv_2$ Durch Polynomdivision kann man dann $\frac{(x+tv_1)^3+(tv_2)^3}{x+tv_1+tv_2}$ umformen zu $(x+tv_1)^2 -$

$(x+tv_1)tv_2+(tv_2)^2$. Damit erhält man:

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{(x+tv_1)^3+(tv_2)^3}{|x+tv_1|+|tv_2|}-\frac{x^3}{|x|}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{(x+tv_1)^2-(x+tv_1)tv_2+(tv_2)^2-\frac{x^3}{|x|}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{x^2+2xtv_1+t^2v_1^2-xtv_2-t^2v_1v_2+t^2v_2^2-x^2}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}2xv_1+tv_1^2-xv_2-tv_1v_2+tv_2^2=2xv_1-xv_2$$

Jetzt müssten wir noch den Grenzwert von links ($t\to 0-$) berechnen. Aufgrund der Betragsstriche wird dieser vermutlich nicht mit dem Grenzwert von rechts übereinstimmen. Den Grenzwert von links zu berechnen, ist allerdings schwierig, da wir nun $|x+tv_1|$ und $|tv_2|$ nicht so einfach umformen können. Da wir schon die Vermutung haben, dass rechts- und linksseitiger Grenzwert im Allgemeinen nicht übereinstimmen, versuchen wir ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben:

Wir betrachten den Punkt $(1.5,0)$ auf der x-Achse und den Richtungsvektor $v=(1,2)$. Damit erhält man

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f\left((x,0)+t(v_1,v_2)\right)-f\left((x,0)\right)}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{f\left((1.5,0)+t(1,2)\right)-f\left((1.5,0)\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{(1.5+t)^3+(2t)^3}{|1.5+t|+2|t|}-2.25}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{(1.5+t)^2-(1.5+t)2t+4t^2-2.25}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}3+t-3-2t+4t=\lim_{t\to 0+}3t=0$$

Nun bilden wir den Grenzwert von links:

$$\lim_{t\to 0-}\frac{\frac{(1.5+t)^3+(2t)^3}{|1.5t|+2|t|}-2.25}{t}=\lim_{t\to 0-}\frac{\frac{(1.5+t)^3+(2t)^3}{1.5-t}-2.25}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0-}\frac{9(2+t+2t^2)}{3-2t}=6$$

Da links- und rechtsseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, existiert der Grenzwert, und somit die Richtungsableitung, nicht. Die Aussage „Die Richtungsableitungen existieren in allen Punkten auf der x-Achse“ ist somit falsch.

5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die Funktion $f\left((x,y,z)^t\right) = \begin{pmatrix} x\sin(x+z) \\ cos(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$.

   a) Berechne die Ableitung $Df\left((x,y,z)^t\right)$ in jedem beliebigen Punkt $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$.

   b) Berechne in jedem Punkt $(x,y,z)^t \in \mathbb{R}^3$ die Richtungsableitung $D_v f\left((x,y,z)^t\right)$ von f in Richtung des Vektors $v = (0,1,1)^t \in \mathbb{R}^3$.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} &Df\left((x,y,z)^t\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sin(y+z) & x\cdot\cos(y+z) & x\cdot\cos(y+z) \\ -\sin(x^2+y^2+z^2)\cdot 2x & -\sin(x^2+y^2+z^2)\cdot 2y & -\sin(x^2+y^2+z^2)\cdot 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{f(x,y+t,z+t)-f(x,y,z)}{t} \\ =&\lim_{t\to 0} \frac{\begin{pmatrix} x\sin(y+t+z+t) \\ \cos(x^2+(y+t)^2+(z+t)^2)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x\sin(y+z) \\ \cos(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}}{t} \\ =&\lim_{t\to 0} \frac{\begin{pmatrix} x\sin(y+z+2t) - x\sin(y+z) \\ \cos(x^2+y^2+z^2+2yt+2zt+2t^2) \end{pmatrix}}{t} \\ =&\lim_{t\to 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{t}x\left(\sin(y+z+2t)-\sin(y+z)\right) \\ \frac{1}{t}\left(\cos(x^2+y^2+z^2+2yt+2zt+2t^2)-\cos(x^2+y^2+z^2)\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir berechnen die Grenzwerte der einzelnen Komponenten mit L‘Hospital:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0} \frac{x\left(\sin(y+z+2t)-\sin(y+z)\right)}{t} \\ =&\lim_{t\to 0} \frac{2x\cos(y+z+2t)}{1} = 2x\cos(y+z) \\ &\lim_{t\to 0} \frac{\cos(x^2+y^2+z^2+2yt+2zt+2t^2)-\cos(x^2+y^2+z^2)}{t} \\ =&\lim_{t\to 0} \frac{-\sin(x^2+y^2+z^2+2yt+2zt+2t^2)\cdot(2y+2z+4t)}{1} = -(2y+2z)\sin(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

Die Richtungsableitung ist also:

$$Df\left((x,y,z)^t\right) = \begin{pmatrix} 2x\cos(y+z) \\ -(2y+2z)\sin(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix}$$

LÖSUNG - AUFGABE 1: Aus der Symmetrie $f(x) = f(-x)$ für $f(x) = e^{-x^2}$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Idee ist es, dass Integral zu zerlegen. Da e^{-x^2} stetig ist, folgt sofort

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}_{<C<\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Für $x \in [1, \infty)$ gilt mit der Monotonie der e-Funktion schon $e^{-x^2} < e^{-x}$. Letztere kann man leicht integrieren, also folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x < 2(C + \int_1^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 2(C + \left[-e^{-x}\right]_1^{\infty}) = 2(C + \frac{1}{e}).$$

Damit existiert das Integral.

Für das Integral $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ nutzen wir partielle Integration sowie die Regel von L'Hospital und erhalten

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x}_{=4} = \underbrace{\left(0 - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}}\right)}_{=0} -4 = -4.$$

Somit existiert auch dieses Integral.

LÖSUNG - AUFGABE 2: Sei $\varepsilon > 0$ geeignet klein, aber fest, dann existiert $C \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x + C$$

gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass $\frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ auf $[\varepsilon, 1]$ stetig ist. Im Intervall $[0, \varepsilon]$ folgt $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$, somit reicht es $\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ zu untersuchen (siehe Notiz unten, falls L'Hospital nicht reicht). Es gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x < \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + C = \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} + C.$$

Somit existiert das Integral.

Notiz: $f \approx g$ für $x \to x_0$ bedeutet $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ (Insbesondere dann beschränkt in einer Umgebung). Dann sieht man am Integral

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\,\mathrm{d}x < C \int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also existiert das eine Integral genau dann, wenn das andere existiert.

LÖSUNG - AUFGABE 3: Im Fall $s < 0$ gilt für $x \geq 1$ schon

$$0 < x^s + x^{\frac{1}{s}} \leq 2,$$

also

$$\frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}} \geq \frac{1}{2}.$$

Somit divergent nach dem Minorantenkriterium.
Im Fall $s \in (0,1)$ folgt

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x^s + x^{\frac{1}{s}}}\,\mathrm{d}x$$

$$< \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{1}{s}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Für $s = 1$ ist das Integral klar divergent.
Für $s > 1$ hat man die selbe Rechnung wie oben, nur mit Majoranten vertauscht.

LÖSUNG - AUFGABE 4: Behauptung ist, dass das $n-$te Integral $n!$ ergibt.
Wir betrachten $n = 1$ und erhalten durch partielle Integration

$$\int_0^\infty x e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 = 1!.$$

Die Aussage gelte nun für $n \in \mathbb{N}$. dann folgt mit partieller Integration

$$\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = (n+1)!$$

Somit ist alles geklärt.

LÖSUNG - AUFGABE 5: Wir benutzen wieder die Approximation von vorher, diesmal außerhalb der 0 als Minorante, und erhalten damit

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral divergiert nach ∞ für $\varepsilon \to 0$. Somit existiert das erste Integral nicht. Das sieht man auch durch Substitution.

LÖSUNG - AUFGABE 6: Die Länge ergibt sich durch

$$\int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_{1}^{3} 2 + t^2\,\mathrm{d}t = 4 + 9 - \frac{1}{3} = \frac{38}{3}.$$

Das Kurvenintegral ist

$$\int_{\gamma} f(s)\,\mathrm{d}s = \int_{1}^{3} (1+t)(2+t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{122}{3}.$$

Die Abschätzung zeigt klar

$$\int_{\gamma} \mathrm{d}s = \int_{1}^{3} 2 + t^2\,\mathrm{d}t < \int_{1}^{3} (1+t)(2+t^2)\,\mathrm{d}t = \int_{\gamma} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

LÖSUNG - AUFGABE 7: Die Tangente ergibt sich als Geradengleichung durch den Punkt mit dem Tangentenvektor (Siehe Vorlesung) entlang der Kurve in dem Punkt. Also ist die Tangente gegeben durch

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + t\left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Parallele Tangente bedeutet, dass der Tangentenvektor die x bzw. y Komponente 0 hat. An der Ableitung durch Quotientenregel sieht man sofort, dass wir eine waagerechte Tangente an $(0,0)$ haben, da die zweite Komponente für $t = 0$ 0 ist. Da

$$\gamma'(t) = \left(\frac{3 - 6t^3}{(1+t^3)^2}, \frac{6t - 3t^4}{(1+t^3)^2}\right)^T$$

gilt, folgt für $t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ eine senkrechte Tange, also bei $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})^T$.

LÖSUNG - AUFGABE 8: Manchmal ist es auch nützlich die letzte Teilaufgabe zuerst zu machen. Da f ein Potential in $x^2 + xy + y$ hat, erhalten wir leicht für beide Kurven

$$\int_{\gamma} f(s)\,\mathrm{d}s = 0^2 + 0 + 1 - 0^2 - 0 - (-1) = 2.$$

Wenn eine Funktion ein Potential besitzt, dann können wir mit dem Hauptsatz der Integral und Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$ einfach die Anfangs-bzw Endpunkte in das Potential einsetzen.

LÖSUNG - AUFGABE 9: Die Länge erhalten wir wie immer

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\left((1-\cos t)^2 + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{d}t = r\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$\sqrt{2}r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t = 2r\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos^2(\frac{t}{2})}\,\mathrm{d}t = 2r\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 8r.$$

Hier war also der Trick die Formel

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

zu nutzen.

LÖSUNG - AUFGABE 10: Die Länge ergibt sich hier sehr leicht:

$$\int_0^{4\pi} ce^{ct}\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\pi} e^c t\sqrt{c^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\left(e^{4\pi c} - 1\right).$$

Wie bei der Bogenlänge üblich haben wir somit die Länge bis t durch

$$s(t) = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}(e^{tc} - 1)$$

gegeben. Umstellen nach t liefert

$$t = \frac{1}{c}\ln\left(1 + \frac{sc}{1+c^2}\right).$$

Somit ergibt sich also die Parametrisierung nach der Bogenlänge durch

$$\gamma(s) = \left(e^{\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)}\cos\left(\frac{1}{c}\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)\right), e^{\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)}\sin\left(\frac{1}{c}\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)\right)\right)$$

$$= \left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)\left(\cos\left(\frac{1}{c}\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)\right), \sin\left(\frac{1}{c}\ln\left(1+\frac{sc}{1+c^2}\right)\right)\right)$$

IMPLIZITE FUNKTIONEN, UMKEHRSATZ

AUFGABE 1

Zuerst muss überprüft werden, ob $f(0,1) = 0$ ist (einfach).
Dann:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 2\cos(x) + \cos(xy)\mathrm{e}^{\sin(xy)}y - 1\big|_{(0,1)} = 2 \neq 0$$

D.h. es existiert eine lokale Auflösung um $(0,1)$. Für die Differenzierbarkeit von Φ (Voraussetzungen zu überprüfen sind einfach) und die erste Ableitung wird der Satz aus der Vorlesung benutzt.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(1) = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(\cos(xy)x\mathrm{e}^{\sin(xy)} - 1)\bigg|_{x=0,y=1} = \frac{1}{2}$$

Daraus kann man das Taylorpolynom bestimmen:

$$T(y) = \frac{1}{2}(y-1)$$

AUFGABE 2

Überprüfe: $f(0,0) = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$$

Satz anwenden und wir sind fertig!

AUFGABE 3

Überprüfe: $g(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$$\frac{\partial g}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} - 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \frac{\partial g}{\partial(y,z)} \right| = 2 \neq 0$$

Satz anwenden und wir sind fertig!

AUFGABE 4

Überprüfe: $F(0,0,0) = 0$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0,0)} = \cos(z)|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{\cos(z)} \frac{\partial F}{\partial(x,y)} = \frac{-1}{\cos(z)} \begin{pmatrix} 4x^3 + 2\cos(y) \\ -2x\sin(y) \end{pmatrix}$$

AUFGABE 5

Gegenbeispiel:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) - \sin(y) e^x \\ e^x \sin(y) e^x \cos(y) \end{pmatrix} \left| \frac{\partial f}{\partial(x,y)} \right| = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Das heißt die Funktion ist überall lokal umkehrbar. Aber sie ist nicht global umkehrbar, da sie nicht injektiv ist (Periode 2π beachten!).

AUFGABE 6

Überprüfe: $f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial(y,z)} \right| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2+1} & 0 \\ 0 & 3z^2+1 \end{pmatrix} \right|_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$$

Mit dem Satz folgt:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial x} = -\begin{pmatrix} y^2+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3z^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 2x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x(y^2+1) \\ \frac{2x}{3z^2+1} \end{pmatrix}$$

AUFGABE 7

a)
f überall lok. Diffeomorphismus, d.h. $f'(x) \neq 0$ für alle x, d.h. f streng monoton, d.h. f ist injektiv.
b)
falsch, Gegenbeispiel, siehe Aufgabe 5!

AUFGABE 8

Überprüfe: $f(1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} -2u & -2v \\ 6u & 8v \end{pmatrix}$$

ist invertierbar ($\det = -4 \neq 0$), d.h. es existiert eine Auflösung in einer Umgebung von $(1,1,1,1)$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial(u.v)} \right)^{-1} = \frac{1}{-4uv} \begin{pmatrix} 8v & 2v \\ -6u & -2u \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz ist dann:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{-4uv} \begin{pmatrix} 8v & 2v \\ -6u & -2u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix} = ...$$

ALLGEMEINE AUSSAGEN ZU TOPOLOGIE U.V.M

WAHR ODER FALSCH

AUFGABE 1

a)
<u>Behauptung:</u>
Einelementige Mengen im $\mathbb{R}^n$ sind stets zusammenhängend.
<u>Beweis:</u>
Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Die einelementige Menge $\{x\}$ hat nur sich selbst und die leere Menge als Teilmenge, das heißt $\{x\}$ lässt sich nicht in zwei disjunkte, nicht-leere und offene Teilmengen zerlegen, denn die leere Menge ist leer.
b)
<u>Behauptung:</u>
Wenn $A \subset \mathbb{R}^n$ ist mit ∂A kompakt, so gilt im Allgemeinen nicht, dass A dann beschränkt ist.
<u>Beweis:</u> (per Gegenbeispiel)
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Sei nun $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} \geq 1\}$. Dann gilt $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$ ist kompakt (abgeschlossen, da ∂A immer abgeschlossen nach Vorlesung und beschränkt durch die 1), jedoch ist A unbeschränkt. $\lightning$ Das ist ein Widerspruch zur Annahme, also gilt die Behauptung.
c)
<u>Behauptung:</u>
Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, dann ist ∂A kompakt.
<u>Beweis:</u>
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge. Dann existiert ein $S \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $a \in A$ gilt: $\|a\| \leq S$. Sei nun $x \in \partial A$ beliebig. Dann existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $a \in A$ so, dass $a \in B_\epsilon(x)$. Das heißt es gilt $\|x - a\| < \epsilon$. Da $a \in A$ ist, gilt außerdem noch $\|a\| \leq S$. Dann ist $\|x\| = \|x - a + a\| \overset{\Delta-\text{Ungleichung}}{\leq} \|x-a\| + \|a\| < \epsilon + S$. Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, kann man zum Beispiel $\epsilon = 1$ setzen und dann gilt für alle $x \in \partial A$: $\|x\| < 1 + S$. Also ist ∂A beschränkt. ∂A ist auch abgeschlossen nach Vorlesung (immer) und damit folgt: ∂A ist kompakt, also ist die Behauptung gezeigt.

d)
<u>Behauptung:</u>
Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $U \subset A$ in A offen, so ist U offen (in $\mathbb{R}^n$).
<u>Beweis:</u>
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $U \subset A$ in A offen. Wir wissen dann, dass einmal für alle $x \in A$ gilt: Es existiert ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset A$ und für alle $u \in U$ gilt: Es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon(u) \subset U$. Damit U offen in $\mathbb{R}^n$ ist, muss gelten, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ und für alle $u \in U$ gilt: Es existiert ein $\epsilon > 0$ so, dass $B_\epsilon \subset U$ ist. Da $U \subset A \subset \mathbb{R}^n$ ist und U in A offen ist, gilt bereits beides und U ist auch offen in $\mathbb{R}^n$.
e)
<u>Behauptung:</u>
Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $U \subset A$ in A abgeschlossen, dann ist U abgeschlossen (in $\mathbb{R}^n$).
<u>Beweis:</u>
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $U \subset A$ in A abgeschlossen. Dann gilt:

1. $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist offen (Das heißt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ existiert ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ ist).
2. $A \setminus U$ ist offen (Das heißt für alle $x \in A \setminus U$ existiert ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset A \setminus U$ ist).

Wir müssen daraus nun zeigen:
Für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ existiert ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset R^n \setminus U$.
Jetzt gilt $\mathbb{R}^n \setminus U = (A \setminus U)\dot{\cup}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Nun wissen wir jedoch, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ ein $r > 0$ existiert so, dass $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ ist und für alle $x \in A \setminus U$ ein $r > 0$ existiert so, dass $B_r(x) \subset A \setminus U$ ist. Das heißt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus U$ existiert ein $r > 0$ so, dass $B_r(x) \subset ((A \setminus U)\dot{\cup}(\mathbb{R}^n \setminus A)) = \mathbb{R}^n \setminus U$ ist und damit ist $\mathbb{R}^n \setminus U$ offen und U abgeschlossen.
f)
<u>Behauptung:</u>
Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, so gilt im Allgemeinen nicht, dass wenn $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, dass auch $f(\mathcal{O})$ offen ist.
<u>Beweis:</u> (per Gegenbeispiel)
Angenommen, die Behauptung sei falsch. Sei nun $f : (0, 2\pi) \to [-1, 1]$ mit $f(x) := sin(x)$. Dann ist $(0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ offen, f stetig nach Vorlesung, jedoch ist $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen. ↯ Das ist ein Widerspruch zur Annahme, also gilt die Behauptung.

BEWEISE

AUFGABE 2

<u>Voraussetzung:</u>
Sei $Y := \{\frac{1}{k} | k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.
<u>Behauptung:</u>
Es ist $\partial Y = \overline{Y} = Y$ und $\mathring{Y} = \emptyset$.
<u>Beweis:</u>
Es ist $\mathring{Y} = \{x \in \mathbb{R} /$ Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset Y\}$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k} \in Y$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $r \in \mathbb{R} \backslash Y$ so, dass gilt: $\frac{1}{k} - \epsilon < r < \frac{1}{k}$. Daraus folgt, dass $B_\epsilon(r) \not\subset Y$, sowie $B_\epsilon(\frac{1}{k}) \not\subset Y$ und damit folgt $\mathring{Y} = \emptyset$. Es gilt $\overline{Y} = \{x \in \mathbb{R} /$ Für alle $\epsilon > 0$ gilt $B_\epsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\} = Y$ (siehe eine Zeile drüber und da dort $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde).
Da nun $\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y} = \overline{Y} \setminus \emptyset$, folgt $\partial Y = \overline{Y} = Y$.

AUFGABE 3

<u>Voraussetzung:</u>
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung.
<u>Behauptung:</u>
f ist stetig in $a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ Für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^m$ von $f(a)$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a mit $f(U) \subset V$.
<u>Beweis:</u>
" $\Rightarrow$ ":
Sei f stetig in $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ so, dass $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$ für alle $x \in B_\delta(a)$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt nach der Stetigkeitsdefintion: Für $V_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^m / \|x - f(a)\| < \epsilon\} \subset \mathbb{R}^m$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass eine Umgebung $U_\delta \subset \mathbb{R}^n$ mit $U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < \delta\}$ existiert, sodass $f(U_\delta) \subset V_\epsilon$. Das kann man so finden, da f stetig ist und somit alle Funktionswerte aus der δ - Umgebung von a in der ϵ - Umgebung von $f(a)$ liegen. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, ist auch V_ϵ beliebig und damit gilt also, dass für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^m$ von $f(a)$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a existiert, mit $f(U) \subset V$.
" $\Leftarrow$ ":
Für alle Umgebungen $V \subset \mathbb{R}^m$ von $f(a)$ existiere eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von a mit $f(U) \subset V$. Das heißt für alle $\epsilon > 0$ gibt es zu $V_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^m / \|x - f(a)\| < \epsilon\}$ ein $\delta > 0$ so, dass $f(U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - a\| < \delta\}) \subset V_\epsilon$. Das heißt zu jeder ϵ - Umgebung um $f(a)$ gibt es eine δ - Umgebung um a, deren Funktionswerte alle in der ϵ - Umgebung liegen. Also gilt:
$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$ und damit ist f stetig in a.

AUFGABE 4

<u>BEHAUPTUNG:</u>
$A \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ A und $\emptyset$ sind die einzigen Teilmengen von A, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
<u>BEWEIS:</u>
" $\Rightarrow$ ":
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend. Dann gilt für alle offenen Mengen O_1, O_2 mit $O_1 \neq \emptyset \neq O_2$: $O_1 \cup O_2 = A \Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. Sei nun Y eine von A und $\emptyset$ verschiedene, nicht-leere Teilmenge von A, die zugleich offen und abgeschlossen ist. Dann ist $A \setminus Y$ offen, da Y abgeschlossen ist. Es gilt nun aber: $Y, (A \setminus Y)$ offen, $Y \neq \emptyset \neq (A \setminus Y)$ und $Y \cup (A \setminus Y) = A$, aber $Y \cap (A \setminus Y) = \emptyset$. ↯
Dies ist ein Widerspruch, da A zusammenhängend ist. Das heißt, so eine Menge Y kann es nicht geben und damit sind A und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von A, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind.
" $\Leftarrow$ ":
Seien nun A und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von A, die sowohl offen, als auch abgeschlossen sind. Angenommen A sei nicht zusammenhängend. Das heißt es existieren offene Teilmengen O_1, O_2 von A mit $O_1 \neq \emptyset \neq O_2 : O_1 \cup O_2 = A$ und $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Daraus folgt jedoch $O_1 = A \setminus O_2$ und $O_2 = A \setminus O_1$. Da somit $A \setminus O_1$ und $A \setminus O_2$ offen sind, sind laut Definition nun O_1 und O_2 abgeschlossen. ↯ Also sind O_1 und O_2 sowohl offen als auch abgeschlossen. A und $\emptyset$ sind also nicht die einzigen Mengen mit dieser Eigenschaft. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also kann die Annahme nicht stimmen und es folgt, dass A zusammenhängend ist.